数　　学

第１問

(1)　$a = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$,　$b = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$ とおく.

(i)　$ab = \boxed{\text{ア}}$　…①,　$a + b = -\boxed{\text{イ}}\left(\boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}\right)$ である.

(ii)　$a^2 + b^2 = \boxed{\text{オ}}\left(\boxed{\text{カ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}\right)$ となるので,

$a^2 + b^2 + 4(a + b) = \boxed{\text{キク}}$　…②である.

(iii)　①および②に着目することにより, a は

$$a^4 + \boxed{\text{ケ}}\,a^3 - \boxed{\text{コサ}}\,a^2 + \boxed{\text{シ}}\,a + \boxed{\text{ス}} = 0$$

を満たすことがわかる.

(2)　m, n は $1 < m < n$ を満たす自然数で

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{8}{5} \quad \cdots③$$

が成り立つ. m, n の組を求めよう.

③の両辺に $15mn$ を掛けて整理すると

$$\left(\boxed{\text{セ}}\,m - \boxed{\text{ソ}}\right)\left(\boxed{\text{タ}}\,n - \boxed{\text{チ}}\right) = \boxed{\text{ツテ}}$$

となり, これより

$$(m,\ n) = \left(\boxed{\text{ト}},\ \boxed{\text{ナニ}}\right),\ \left(\boxed{\text{ヌ}},\ \boxed{\text{ネ}}\right)$$

を得る.

第2問

(1)

(i)　x の不等式 $|3x-6|<x+1$ を解くと

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}<x<\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である.

(ii)　a は $a>-1$ を満たす定数とする.

x の不等式 $|3x-3a|<x+1$ を解くと

$$\frac{\boxed{\text{オ}}\,a-\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}<x<\frac{\boxed{\text{ク}}\,a+\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

であり，この解が $x=5$ を含むような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{サ}}<a<\boxed{\text{シ}}$$

である.

(2) a は正の定数とし，x についての連立不等式

$$\begin{cases} x^2-(2a^2-1)x-2a^2 \leqq 0 & \cdots① \\ x^2+(2a-4)x-8a \geqq 0 & \cdots② \end{cases}$$

を考える．このとき，

不等式①の解は $\boxed{\text{スセ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ソ}}\,a^2$ であり，不等式②の解は

$$x \leqq \boxed{\text{タチ}}\,a, \quad \boxed{\text{ツ}} \leqq x$$

である．

(i) 上記の連立不等式を満たす実数 x が存在しないような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} < a < \sqrt{\boxed{\text{ナ}}}$$

である．

(ii) 上記の連立不等式を満たす負の数 x が存在するような a の値の範囲は

$$0 < a \leqq \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である．

第3問

(1)　$0° < \theta < 180°$ とする．　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，

$$\sin\theta\cos\theta = -\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$$

である．また，

$$\sin\theta = \frac{\boxed{ウ} + \sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}, \qquad \tan\theta = -\frac{\boxed{カ} + \sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$$

である．

(2)　円 K に内接する四角形 ABCD において，$AB = 3$，$BC = 6$，$CD = 4$，$DA = 3$，$\angle ABC = \theta$ とする．

三角形 ABC と三角形 ADC にそれぞれ余弦定理を用いることにより

$$AC^2 = \boxed{ケコ}, \qquad \cos\theta = \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$$

を得る．

K の半径を R とすると，$R = \dfrac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セソ}}}{\boxed{タ}}$ である．

また，四角形 ABCD の面積は $\boxed{チツ}\sqrt{\boxed{テ}}$ である．

第4問

(1) 男子生徒6人，女子生徒6人の計12人の生徒から5人の生徒を選ぶ.

(i) 女子生徒が少なくとも1人は含まれるような選び方は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りである.

(ii) 男子生徒と女子生徒がともに少なくとも1人は含まれるような選び方は $\boxed{\text{エオカ}}$ 通りである.

(iii) 男子生徒が少なくとも2人は含まれるような選び方は $\boxed{\text{キクケ}}$ 通りである.

(2) 1個のサイコロを繰り返し3回振る.

(i) 少なくとも1回は6の目が出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シスセ}}}$ である.

(ii) 3回の目の最大値が4となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{シスセ}}}$ である.

(iii) 3回の目の最小値が2となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{シスセ}}}$ である.

(iv) 3回の目の最大値が4で最小値が2である確率は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$ である.