Ⓓ

数　　　学

第１問

(1)　実数 α，β をそれぞれ $\alpha = 5 - \sqrt{15}$，$\beta = 5 + \sqrt{15}$ とする.

$\alpha^2 = \boxed{\text{アイ}} - \boxed{\text{ウエ}}\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}$ であり，$\boxed{\text{ウエ}}\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}$ の整数部分は $\boxed{\text{キク}}$ である.

また，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を小数で表すとき，小数第 1 位の数字は $\boxed{\text{ケ}}$ である.

(2)

(i)　m，n は正の整数とする.

$n^2 + 21 = m^2$ を満たす m，n の組は

$$(m,\ n) = \left(\boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サ}}\right),\ \left(\boxed{\text{シス}},\ \boxed{\text{セソ}}\right)$$

である.

(ii)　$\sqrt{n^2 + 80}$ が整数となるような正の整数 n は小さい方から

$\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツテ}}$ である.

(iii)　$\sqrt{n^2 + 2n + 97}$ が整数となるような正の整数 n は小さい方から

$\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$，$\boxed{\text{ニ}}$，$\boxed{\text{ヌネ}}$ である.

第２問

(1)

(i)　x の不等式 $|x-2| > \dfrac{1}{6}x + \dfrac{11}{2}$ を解くと

$$x < \boxed{\text{アイ}},\quad \boxed{\text{ウ}} < x$$

である．

(ii)　a を実数の定数とする．x の２次不等式

$$x^2 - a(a-2)x - a(a-2) - 1 < 0$$

を解くと

$$\boxed{\text{エオ}} < x < a^2 - \boxed{\text{カ}}\,a + \boxed{\text{キ}}$$

である．

(iii)　連立不等式

$$\begin{cases} |x-2| > \dfrac{1}{6}x + \dfrac{11}{2} \\ x^2 - a(a-2)x - a(a-2) - 1 < 0 \end{cases}$$

を満たす実数 x が存在するような実数の定数 a の値の範囲は

$$a < \boxed{\text{クケ}},\quad \boxed{\text{コ}} < a$$

である．

(2) a を実数の定数として，$0 \leqq x \leqq 3$ の範囲で，関数

$$f(x) = (x^2 - 2x)(-x^2 + 2x + a)$$

を考える．$t = x^2 - 2x$ とする．

$0 \leqq x \leqq 3$ のとき，t のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{サシ}} \leqq t \leqq \boxed{\text{ス}}$$

である．

$f(x)$を t を用いて表すと

$$f(x) = -\left(t - \frac{a}{\boxed{\text{セ}}}\right)^2 + \frac{a^2}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である．$f(x)$の最大値をMとする．

$$M = \begin{cases} \boxed{\text{タ}}\,a - \boxed{\text{チ}} & \left(a < \boxed{\text{ツテ}} \text{ のとき}\right) \\ \dfrac{a^2}{\boxed{\text{ソ}}} & \left(\boxed{\text{ツテ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{ト}} \text{ のとき}\right) \\ \boxed{\text{ナ}}\,a - \boxed{\text{ニ}} & \left(\boxed{\text{ト}} < a \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

となる．

$M \leqq 4$ となるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{ヌネ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{ノ}}$$

である．

第3問

(1) θ は $0° < \theta < 90°$, $\sin\theta = \dfrac{5}{13}$ を満たすとする.

このとき, $\cos\theta = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ であり, $\cos(90° - \theta) = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$,

$\tan(90° - \theta) = \dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である.

(2) $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 2$, $\mathrm{CD} = 1$, $\angle\mathrm{BCD} = 120°$ である四角形 ABCD が円 K に内接している. このとき, 対角線 BD の長さは $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ であり, 辺 AD の長さは $\boxed{\text{シ}}$ である.

また, 三角形 ABD の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ であり, 円 K の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である.

いま, 2つの対角線 AC と BD の交点を E とすると,

$$\mathrm{BE} = \frac{\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である.

第4問

(1) 6個の文字A，A，B，C，D，Eを横一列に並べる．

(i) 並べ方は全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りである．

(ii) BがCより左にあるような並べ方は $\boxed{\text{エオカ}}$ 通りである．

(iii) BがCより左にあるか，またはCがDより左にあるような並べ方は

$\boxed{\text{キクケ}}$ 通りである．

(2) x 軸上を動く点Pが最初原点にある．

さいころを投げて，出た目が素数ならばPは動かず，出た目が1か4のいずれかならばPは x 軸の正の方向に1だけ動き，出た目が6ならばPは x 軸の負の方向に1だけ動くものとする．

さいころを n 回投げた後のPの x 座標を X_n とする．

(i) $X_2 = 0$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である．

(ii) $X_3 = 2$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である．

(iii) $X_3 = 1$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である．

(iv) $X_4 = 2$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌネ}}}$ である．